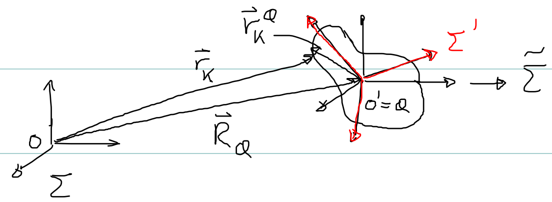
Queremos descrever o movimento de um corpo rígido. Para isso precisaremos de 6 graus de liberdade: 3 p/ descrever o mov. translacional de um ponto O' fixo ao corpo, e outros 3 para o movimento rotacional do corpo.

Descreveremos esses movimentos tanto a partir de um referencial inercial Σ, como de um ref. n. inercial Σ' com origem em O' e eixos fixos ao corpo. Pode ser útil considerar ainda eixos $\tilde{\Sigma}$ com origem em O' mas paralelos a Σ (ie, não fixos ao corpo). Finalmente, muitas vezes será conveniente escolher o mesmo ponto O' como o ponto de referência Q para descrever rotações. (fig):



Por definição as posições $\vec{r}_K^Q$ das partículas do corpo rígido com respeito a $O'=Q$ são fixas no referencial Σ', ie: $\left(\frac{d r_K^Q}{dt}\right)_{\Sigma'} = 0$

Visto do ref. Σ, este mesmo vetor $\vec{r}_K^Q$ varia no tempo:

$$\left(\frac{d\vec{r}_K^Q}{dt}\right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{r}_K^Q}{dt}\right)_{\tilde{\Sigma}} = \cancelto{0}{\left(\frac{d\vec{r}_K^Q}{dt}\right)_{\Sigma'}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_K^Q$$

Isto implica $\quad \vec{L}^Q = \sum_K m_K\, \vec{r}_K^Q \times(\vec{\omega}\times\vec{r}_K^Q) = \sum_K m_K\left[(r_K^Q)^2\,\vec{\omega} - (\vec{r}_K^Q\cdot\vec{\omega})\,\vec{r}_K^Q\right]$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{L}^Q = \underbrace{\left[\sum_K m_K\left[(r_K^Q)^2\,\mathbb{1} - \overbrace{\vec{r}_K^Q\,\vec{r}_K^Q}^{\text{díada}}\right]\right]}_{\text{operador linear}}\vec{\omega} \equiv \hat{I}^Q\,\vec{\omega}}$$

onde definimos o "tensor de inércia" do corpo $\boxed{\overset{\leftrightarrow}{I}^{\alpha} \equiv \sum_K m_K \left(r_K^{\alpha 2} \mathbb{1} - \vec{r}_K^{\,\alpha} \vec{r}_K^{\,\alpha} \right)}$

obs: note que este operador depende da escolha de α, e que a relação

$\vec{L}^{\alpha} = \overset{\leftrightarrow}{I}^{\alpha} \vec{\omega}$ vale p/ qq ponto α fixo ao corpo

Podemos também expressar essa relação em termos de componentes com respeito a qualquer sistema de eixos $\{\hat{e}_i\}$ (inercial ou não):

$$L_i^{\alpha} = \sum_j I_{ij}^{\alpha} w_j \,, \qquad \text{onde} \quad \underbrace{I_{ij}^{\alpha} \equiv \sum_K m_K \left[r_K^{\alpha 2} \delta_{ij} - x_i^{\alpha(K)} x_j^{\alpha(K)} \right]}_{\text{componentes da matriz de } \overset{\leftrightarrow}{I}^{\alpha} \text{ c/ respeito a esses eixos}} = \hat{e}_i \cdot \overset{\leftrightarrow}{I}^{\alpha} \cdot \hat{e}_j$$

No caso de um corpo rígido contínuo: $m_K \to \rho\, dV$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}^{\alpha} \longrightarrow \int_{\substack{\text{sobre}\\ \text{o}\\ \text{corpo}}} \rho \left[r^{\alpha 2} \mathbb{1} - \vec{r}^{\,\alpha} \vec{r}^{\,\alpha} \right] dV \;; \qquad I_{ij}^{\alpha} \longrightarrow \int_{\substack{\text{sobre}\\ \text{o}\\ \text{corpo}}} \rho \left[r^{\alpha 2} \delta_{ij} - r_i^{\alpha} r_j^{\alpha} \right] dV \;;$$

Propriedades do tensor de Inércia

1. O $\overset{\text{operador}}{\underset{\text{ou tensor}}{}}$ I^Q depende do ponto Q escolhido como referência p/ o mom. angular, mas é um objeto independente da escolha de eixos. Já as <u>componentes</u> I_{ij}^Q dependem da escolha de eixos, assim como as componentes r_i de um vetor $\vec{r}$.

A partir de agora, para simplificar a notação, vamos deixar de fazer referencia explícita ao ponto Q, exceto onde necessário.

2. A matriz de I é simétrica: $I_{ij} = I_{ji}$, em qq sistema de eixos

3. As componentes diagonais de I são ≥ 0, e chamadas <u>momentos de inércia</u>

$$I_{11} = I_{xx} = \int_V (r^2 - x^2)\rho\, dV = \int_V \underbrace{(y^2+z^2)}_{\text{distância ao eixo } x} \rho\, dV$$

$$I_{22} = I_{yy} = \int \rho (x^2+z^2)\, dV \quad ; \quad I_{33} = I_{zz} = \int \rho \left(x^2+y^2\right) dV$$

correspondem às qtdes utilizadas no tratamento elementar

As componentes não-diagonais podem ser ≥ 0 ou < 0, são chamadas <u>produtos de inércia</u>

$$I_{12} = I_{21} = -\int xy\rho\, dV \quad ; \quad I_{13} = I_{31} = -\int xz\rho\, dV \quad ; \quad I_{23} = I_{32} = -\int yz\rho\, dV$$

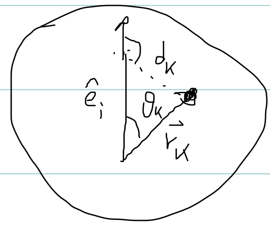
No caso em que os produtos de inércia se anulam, $I = \begin{pmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal. Para essa escolha especial de eixos vale que

$$\vec{L} = I_{11}\,\omega_1\,\hat{e}_1 + I_{22}\,\omega_2\,\hat{e}_2 + I_{33}\,\omega_3\,\hat{e}_3$$

Em particular, (apenas) se $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_i$ aponta em uma destas direções especiais é que vale a relação <u>escalar</u> $L = I_{ii}\,\omega$, que é o caso estudado na mec. elementar

Obs 2: interpretação geométrica do momento de inércia na direção $\hat{e}_i$:

$$I_{ii} = \hat{e}_i \cdot I \cdot \hat{e}_i = \sum_k m_k\left[r_k^2 - (\hat{e}_i\cdot\vec{r}_k)^2\right] = \sum_k m_k r_k^2 \overbrace{(1-\cos^2\theta_k)}^{\text{sen}^2\theta_k} = \sum_k m_k \underbrace{|\vec{r}_k \times \hat{e}_i|^2}_{\substack{= \text{distância}^2 \text{ de } \vec{r}_k \\ \text{ao eixo} \equiv d_k^2}}$$



Energia cinética de rotação

A velocidade de cada elemento do corpo pode ser escrita, no ref. inercial Σ, como

$$\vec{v}_k = \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right)_\Sigma = \left(\frac{d}{dt}\vec{R}_Q\right)_\Sigma + \left(\frac{d\vec{r}_k^{\,Q}}{dt}\right)_\Sigma = \vec{V}_Q + \overbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}_k^{\,Q}}^{\equiv \vec{v}_k^{\,Q}} \quad \text{, onde } \vec{V}_Q = \left(\frac{d\vec{R}_Q}{dt}\right)_\Sigma$$

Assim, a energia cinética total do corpo no ref. Σ é

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_k m_k\right)V_Q^2 + \vec{V}_Q\cdot\sum_k m_k \vec{v}_k^{\,Q} + \frac{1}{2}\sum_k m_k v_k^{Q\,2}$$

Vamos analisar cada termo desta expressão: o 1° corresponde à energia cinética caso toda a massa $M = \sum_k m_k$ do corpo estivesse concentrada no ponto Q.

O 2° termo pode ser reescrito como $\vec{V}_Q\cdot\left[\vec{\omega}\times\sum_k m_k\vec{r}_k^{\,Q}\right] = \vec{V}_Q\cdot\left[\vec{\omega}\times M(\vec{R}_{CM}-\vec{R}_Q)\right]$

Vemos então que podemos anular este termo se o ponto Q for escolhido de forma apropriada:

i) Se $Q = CM$ do corpo, o termo se anula automaticamente

ii) Se o corpo possuir um ponto fixo num referencial inercial, então tomando Q como este ponto, o termo se anula se <u>também</u> escolhermos a origem do ref. Σ ali, de modo que $\vec{V}_Q = 0$. (obs: note que nesse caso o 1° termo tb se anula!)

O 3° termo mede a energia cinética T^{Q}_{Rot} do movimento de rotação ao redor do ponto Q.

Podemos reescrevê-lo como

$$T^{Q}_{Rot} = \sum_K \frac{m_K {v^Q_K}^2}{2} = \sum_K \frac{m_K}{2} \vec{v}^{\,Q}_K \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,Q}_K) = \sum_K \frac{m_K}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}^{\,Q}_K \times \vec{v}^{\,Q}_K) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}^{Q}$$

$\therefore$ como $\vec{L}^{Q} = \mathbb{I}^{Q} \vec{\omega}$: $\boxed{T^{Q}_{Rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}^{Q} \cdot \vec{\omega}}$ (obs: válido p/ qq escolha de Q)

Obs: Escolhendo eixos $\hat{e}_i$ na direção dos eixos principais do corpo, a expressão fica

$$T^{Q}_{Rot} = \frac{1}{2}\left[I_{11} \omega_1^2 + I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2 \right]$$

Obs: tomando $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ (ie, $\hat{n}$ é o vetor unitário na direção instantânea da vel. angular):

$$\boxed{T^{Q}_{Rot} = \frac{1}{2} \mathcal{I}^{Q} \omega^2}$$

onde $\mathcal{I}^{Q} \equiv \hat{n} \cdot \hat{\mathbb{I}}^{Q} \cdot \hat{n}$ é o momento de inércia com respeito ao eixo de rotação (comparar $I_{ii} = \hat{e}_i \cdot \mathbb{I} \cdot \hat{e}_i$). Esta expressão generaliza aquela utilizada na mec. elementar, onde $\hat{n}$ costuma ser fixo. Aqui isso em geral não será verdade, de modo que $\mathcal{I}$ (e T_{rot}) podem mudar no tempo, mesmo se $|\vec{\omega}|$ for fixo.

Em resumo: escolhendo o CM do corpo como o ref. de rotações, podemos escrever

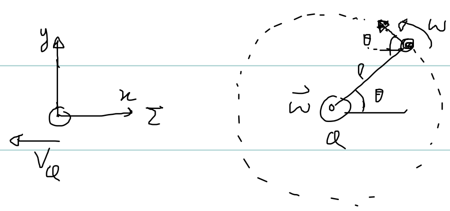
$$T = T_{Trans} + T_{Rot}^{CM} \quad , \text{onde } T_{trans} = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 \quad \text{e} \quad T_{Rot}^{CM} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I^{CM} \cdot \vec{\omega}$$

Por outro lado, se o corpo possui um ponto Q fixo c/ respeito a um ref. inercial (o qual <u>não</u> precisa ser o CM), e se tomarmos <u>esse ponto</u> como origem do ref., então

$$T = T_{rot}^{Q} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I^{Q} \cdot \vec{\omega}$$

<u>Exemplo</u>: Considere o "corpo rígido" mais simples possível: uma massa m localizada na ponta de um bastão rígido, de massa desprezível e comprimento ℓ. Suponha que o bastão gira com vel. angular $\vec{\omega}$ constante ao redor de um eixo passando outra ponta. Colocando a origem em Q, temos simplesmente

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2$$



Suponha porém que a origem de Σ esteja em um ponto se movendo c/ vel. fixa $-\vec{v}_Q$ em relação a Q. Do ponto de vista de Σ, é Q quem tem vel. fixa $\vec{v}_Q$. Tomando o eixo $\hat{x}$ de Σ nessa direção temos então

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left[(V_Q - \omega \ell \cos\theta)^2 + (\omega \ell \operatorname{sen}\theta)^2 \right] = \frac{1}{2} m V_Q^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2 - m \omega \ell v_Q \cos\theta(t)$$